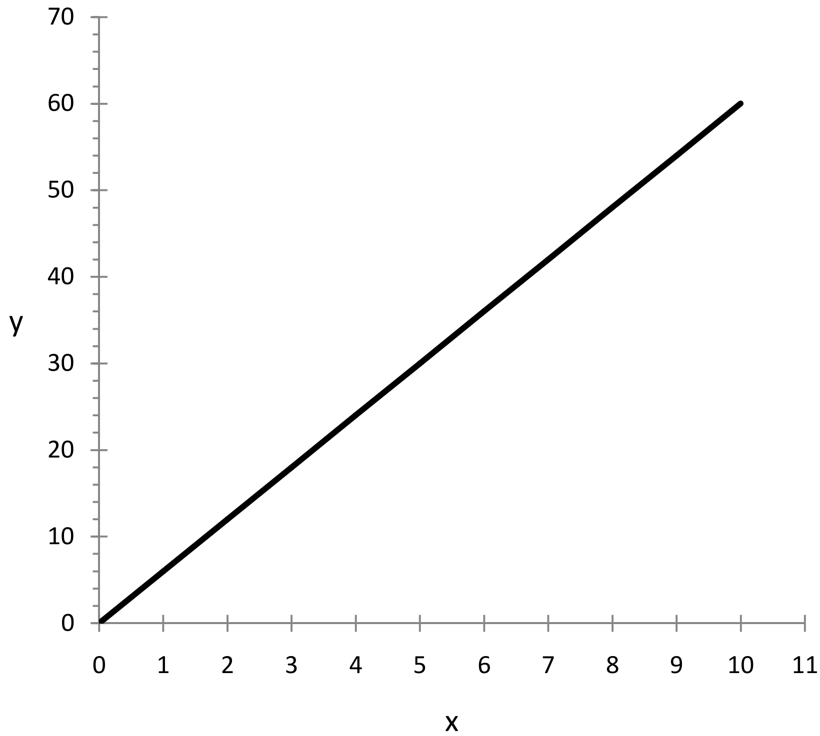
Von x^2 zu 2x

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist eine lineare Funktion der Form $y = kx + d$, welche zunächst in Abbildung 1 grafisch dargestellt wird.

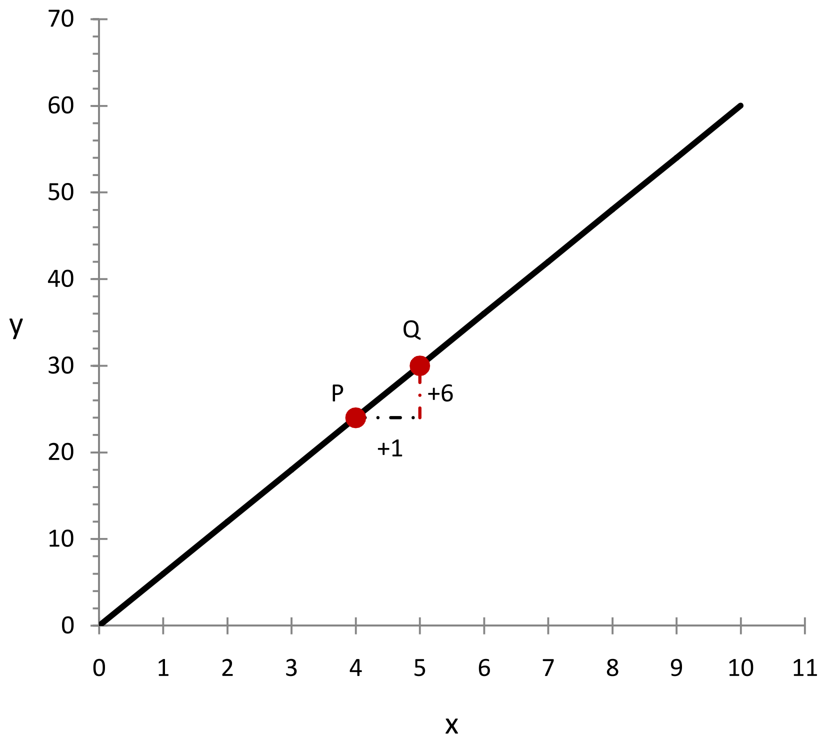
Abbildung 1



Stellen wir uns nun die Frage, wie sich die abhängige Variable y ändert, wenn sich die unabhängige Variable x ändert, dann sind wir formal an der Steigung k der Funktion interessiert.

Da es sich im vorliegenden Beispiel um eine Geradengleichung handelt und damit die Steigung der Funktion in jedem Punkt gleich groß ist, ist auch die y-Veränderung für eine gegebene x-Veränderung immer gleich groß. Daher können wir zur Beantwortung der Frage zwei beliebige Punkte auf der Funktion herausgreifen. Exemplarisch greifen wir uns die Punkte P und Q heraus (vgl. Abbildung 2).

Abbildung 2



Wenn wir uns entlang der Funktion von Punkt P nach Punkt Q bewegen, so können wir obiger Abbildung entnehmen, dass sich der x-Wert um +1 und der y-Wert um +6 erhöht.

Setzen wir nun die Änderungen der Werte von x und y ins Verhältnis, erhalten wir die Steigung der Funktion.

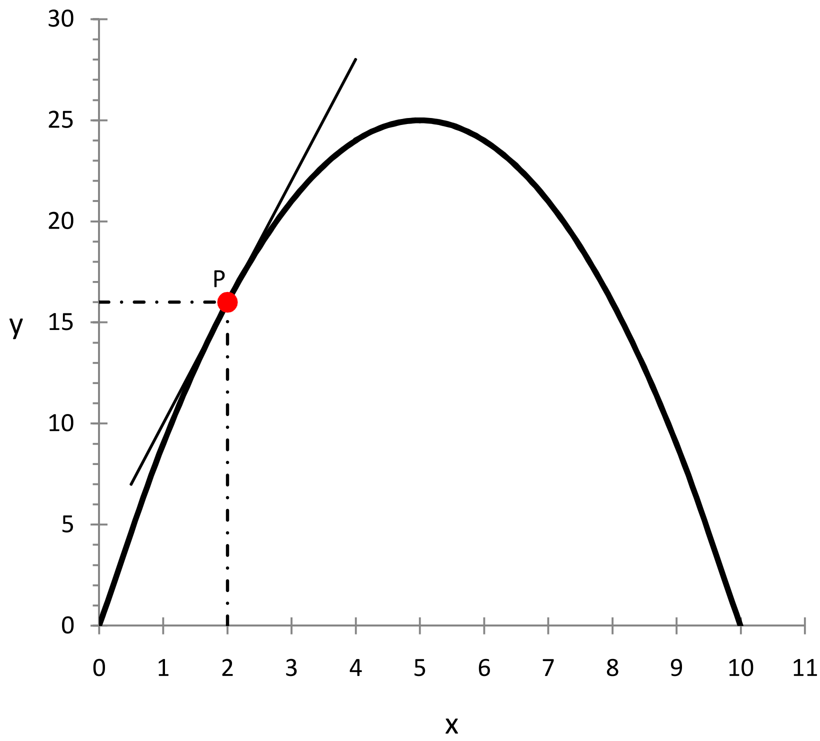
Im konkreten Beispiel beträgt die Steigung $+6$ da gilt:

$$\mathrm{k} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{+6}{+1} = 6$$

Wenn wir es also mit einer **linearen Funktion** zu tun habe ist es – wenn wir mindestens zwei Punkte auf der Funktion kennen – vergleichsweise einfach die Steigung der Funktion zu bestimmen.

Was ist aber für eine **beliebige Funktion** $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ die Steilheit ihres Grafen? Also: Wie groß ist beispielsweise die Steigung der **quadratischen Funktion** $\mathrm{y} = 10\mathrm{x} - \mathrm{x}^2$ (vgl. Abbildung 3) in einem beliebigen Punkt, z. B. im Punkt $\mathrm{P}(2, 16)$.?

Abbildung 3



Eine Möglichkeit die Frage zu beantworten besteht darin die erste Ableitung zu bilden, wobei wir unter Anwendung der bekannten Differentiationsregeln für die erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 10 - 2x$$

erhalten.

Setzen wir nun den x-Wert des Punktes $P(2, 16)$ in die erste Ableitung ein, so erhalten wir für die Steigung $f'(x)$ im Punkt P den Wert 6.

So! Wie kommt man aber nun auf oben angewandte Ableitungsregel und warum entspricht die erste Ableitung der Steigung?

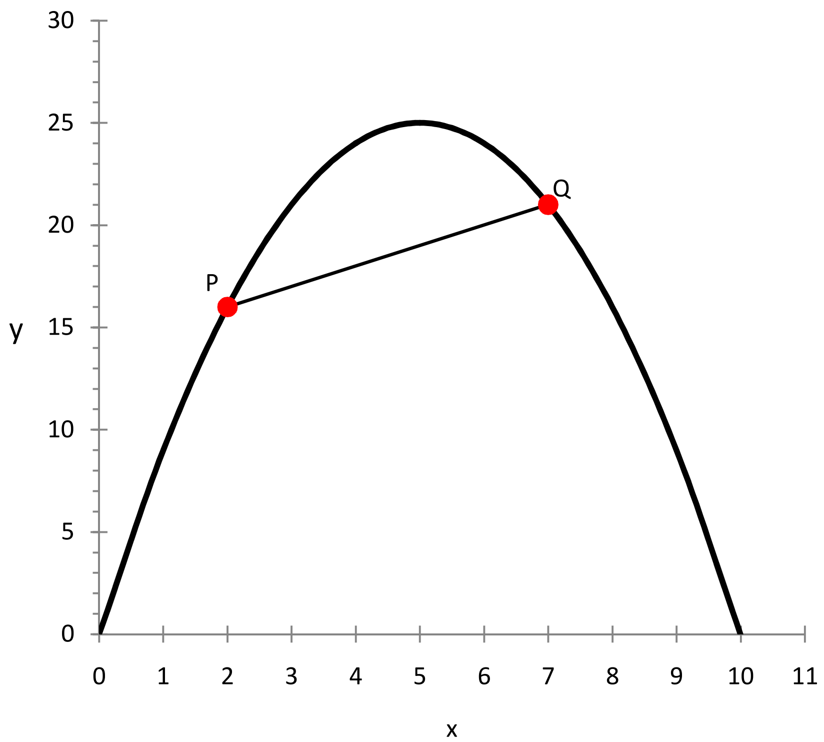
Dazu müssen wir zunächst Folgendes wissen:

Die Steilheit wird als Steigung der Tangente ***definiert*** und heißt Ableitung.

Aber was heißt das konkret?

Stellen wir uns dazu Folgendes vor. Wir wählen einen zweiten Punkte auf dem Grafen und nennen diesen Punkt Q (vgl. Abbildung 4). Dann verbinden wir die beiden Punkte durch eine Gerade. Die sich ergebende Gerade hat einen speziellen Namen: Sie heißt Sekante.

Abbildung 4



Wollen wir nun wissen wie groß die Steigung dieser Sekante ist, dann müssen wir – so wie wir es bereits in Abbildung 1 bei der Geradengleichung getan haben – die y-Veränderung zur x-Veränderung, die wir jeweils vollziehen müssen, wenn wir von Punkt P zu Punkt Q gelangen wollen, ins Verhältnis setzen.

Aus Abbildung 5 können wir entnehmen, dass der x-Wert in Punkt P 2 und in Punkt Q 7 ist. Setzen wir die beiden Werte in die Funktion $y = f(x) = 10x - x^2$ ein, so erhalten wir die dazugehörenden y-Werte $y = f(2) = 10 * 2 - 2^2 = 16$ bzw. $y = f(7) = 10 * 7 - 7^2 = 21$. D.h.: Bewegen wir uns von Punkt P nach Punkt Q, so steigt sowohl der x-Wert wie auch der y-Wert um +5 ($\Delta x = \Delta y = +5$). Damit beträgt die Steigung der Sekante m_{PQ} +1 gemäß der Formel

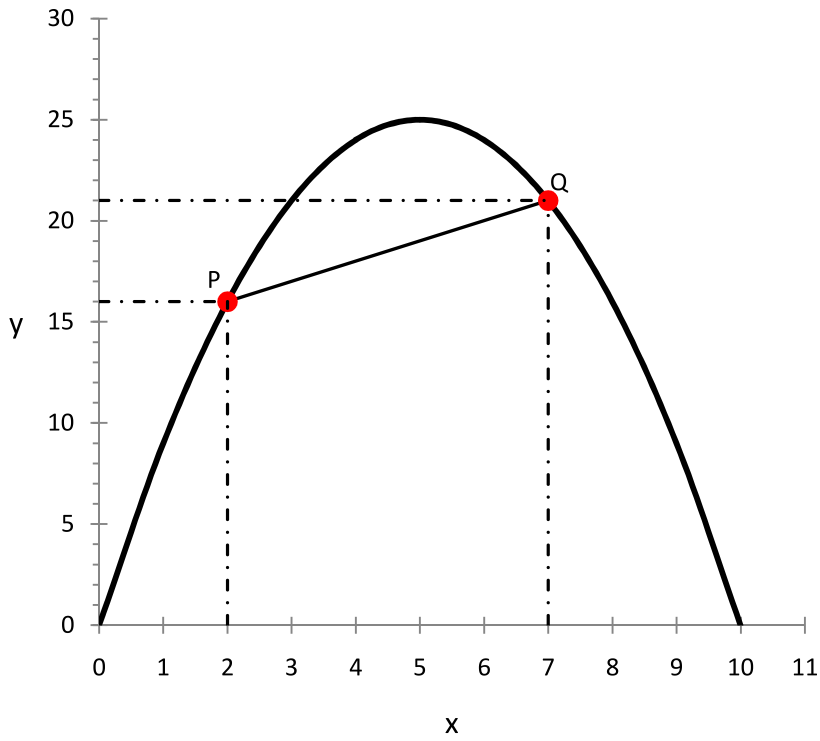
$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(10 * 7 - 7^2) - (10 * 2 - 2^2)}{7 - 2} = +1$$

Allgemein schaut das so aus:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

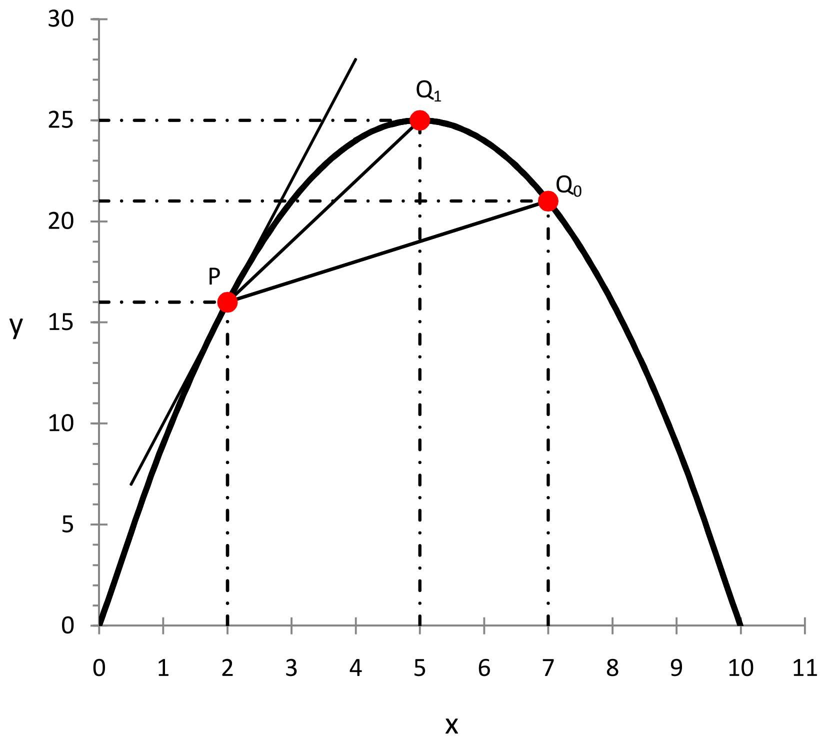
(Vergleiche die allgemeine Schreibweise mit obigem Zahlenbeispiel!)

Abbildung 5



Wenn wir nun den Punkt P festhalten – seine Position auf dem Grafen also nicht verändern – und den Punkt Q entlang des Grafen immer näher an den Punkt P heranführen, so können wir erkennen, dass die Sekante – also die Gerade, die die beiden Punkte verbindet – immer steiler wird (vgl. Abbildung 6). Wichtig an dieser Stelle ist es auch zu beachten, dass damit die x-Veränderung immer geringer wird!

Abbildung 6



Lassen wir nun die x-Veränderung immer kleiner werden (Man sagt, dass die x-Veränderung gegen Null strebt), so können wir erkennen, dass der Punkt Q gegen den Punkt P strebt und damit (Achtung festhalten!) die Sekante zur Tangente wird.

Formal bilden wir dazu den sogenannten Limes und das sieht dann so aus:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

Und in Worten: Wir verändern den x-Wert um den unendlich kleinen Betrag Δx und rechnen uns die damit einhergehende y-Veränderung aus. Das Verhältnis der Veränderungen entspricht dann der Steigung im Punkt P.

Damit haben wir uns das Rüstzeug erarbeitet um erklären zu können, weshalb aus $(10x - x^2)$ durch Differenzieren $(10 - 2x)$ wird und dies wiederum der Steigung der Funktion entspricht.

Dazu schreiben wir in einem ersten Schritt allgemein die Steigung der Sekante an.

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Im zweiten Schritt setzen wir den konkreten funktionalen Zusammenhang ein und vereinfachen so weit wie möglich. (Zur Erinnerung: $f(x) = 10x - x^2$ und $f(x + \Delta x) = 10(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2$)

$$m_{PQ} = \frac{\overbrace{10(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2}^{f(x+\Delta x)} - \overbrace{10x - x^2}^{f(x)}}{\Delta x}$$

$$m_{PQ} = \frac{10x + 10\Delta x - x^2 - 2x\Delta x + \Delta x^2 - 10x + x^2}{\Delta x}$$

$$m_{PQ} = \frac{10\Delta x - 2x\Delta x + \Delta x^2}{h} = \frac{\Delta x(10 - 2x + \Delta x)}{\Delta x} = 10 - 2x + \Delta x$$

Im dritten und letzten Schritt lassen wir den Wert von Δx gegen Null streben, wodurch die x-Veränderung unendlich klein wird und damit der Punkt Q immer näher an den Punkt P herangeführt wird. Formal bilden wir wie bereits erwähnt den Limes und erhalten als Ergebnis

$$\lim_{\Delta x \to 0}(10 - 2x + \Delta x) = 10 - 2x$$

was der Steigung und der ersten Ableitung der Funktion $y = 10x - x^2$ entspricht.

■ QED